Examen Mécanique Juillet 2013

Exercice 1 :

(a) $\vec{\sigma}(O) = \sum_i \vec{OA_i} \wedge m_i \vec{v}(A_i)$

(b) $\vec{\sigma}(O) = \sum_i \vec{OA_i} \wedge m_i \vec{v}(A_i)$

$$= \sum_i \left(OG + GA_i \right) \wedge m_i \vec{v}(A_i)$$

$$= \vec{\sigma}^* + \vec{OG} \wedge \vec{P} \qquad \left(1^{er} \text{ Th. de König} \right)$$

Exercice 2 :

(a) $\displaystyle\int_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \int_{\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{l}$

(b) et (c) Si $S \to 0$: $(\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \vec{A} \cdot d\vec{l}$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \frac{\vec{A} \cdot d\vec{l}}{dS} \, \vec{n}$$

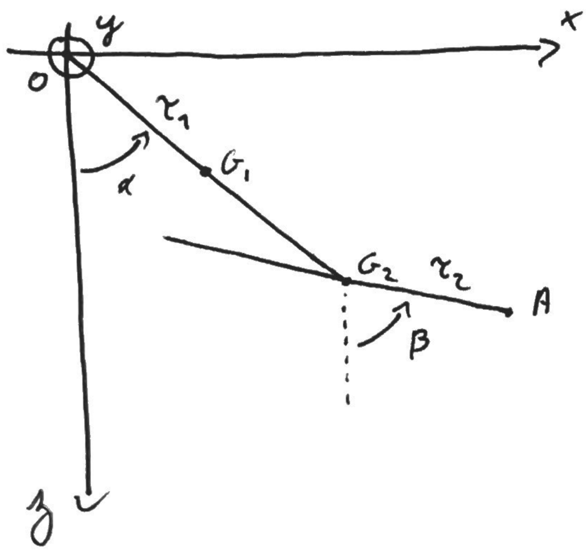
$$\Leftrightarrow \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \frac{1}{h_\rho h_\theta h_z} \begin{vmatrix} h_\rho \hat{\rho} & h_\theta \hat{\theta} & h_z \hat{z} \\ \partial_\rho & \partial_\theta & \partial_z \\ h_\rho A_\rho & h_\theta A_\theta & h_z A_z \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{\rho} \partial_\theta A_z - \partial_z A_\theta \right) \hat{\rho}$$

$$+ \left(\partial_z A_\rho - \partial_\rho A_z \right) \hat{\theta}$$

$$+ \frac{1}{\rho} \left(\partial_\rho (\rho A_\theta) - \partial_\theta A_\rho \right) \hat{z}$$

Exercice 3 :



(a) $I_1 = \int_{l_1} d^2\, dm = \int_{l_1} l^2 \lambda\, dl = \frac{1}{3} m_1 l_1^2$

$I_\Delta = I_{\Delta G} + md^2$ (Th. de Huygens)

$\Rightarrow I_2 = \frac{1}{3} m_2 l_2^2 - m_2 \left(\frac{l}{2}\right)^2$

$= \frac{1}{12} m_2 l_2^2$

(b) $\vec{\sigma}(O) = \vec{OA_i} \wedge m_i\, \vec{v}(A_i)$

Quelque soit O, $\vec{OA_i}$ reste dans le plan $(\hat{x}, \hat{z})$

De même, $\vec{v}(A_i)$ est inclus dans $(\hat{x}, \hat{z})$

Par conséquent, le produit vectoriel sera toujours selon $\hat{y}$.

(c) $\vec{\sigma}^{*}_{\tau_2} = I_2 \dot{\vec{\beta}} = I_2 \dot{\beta} \hat{y}$

(d) $\vec{\sigma}_{\tau_2}(O) = \vec{\sigma}^{*}_{\tau_2} + \vec{OG} \wedge m_2 \vec{v}(G_2)$

$= I_2 \dot{\beta} \hat{y} + l_1 \hat{r} \wedge m_2 l_1 \dot{\alpha} \hat{\theta} = \left(I_2 \dot{\beta} + l_1^2 m_2 \dot{\alpha}\right) \hat{y}$

$$\vec{\sigma}_{\tau_1}(O) = I_1 \dot{\alpha} \hat{y}$$

$$\Rightarrow \vec{\sigma}_{tot}(O) = \left(I_1 \dot{\alpha} + I_2 \dot{\beta} + l_1^2 m_2 \dot{\alpha}\right) \hat{y}$$

(e) $$\frac{d\vec{\sigma}(O)}{dt} = \vec{M}_{ext}(O) = \vec{OG_1} \wedge m_1 \vec{g} + \vec{OG_2} \wedge m_2 \vec{g}$$

$$= \frac{l_1}{2}\left(\sin(\alpha)\hat{x} + \cos(\alpha)\hat{z}\right) \wedge m_1 g \hat{z} + l_1\left(\sin(\alpha)\hat{x} + \cos(\alpha)\hat{z}\right) \wedge m_2 g \hat{z}$$

$$= -\frac{l_1}{2}\sin(\alpha) m_1 g \hat{y} - l_1 \sin(\alpha) m_2 g \hat{y}$$

$$= -l_1 \sin(\alpha) g \left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) \hat{y}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(I_1 \dot{\alpha} + I_2 \dot{\beta} + l_1^2 m_2 \dot{\alpha}\right) = l_1 \sin(\alpha) g \left(\frac{m_1}{2} + m_2\right)$$

(f) $$\vec{\sigma}_{\tau_2}(O) = \vec{\sigma}^{\star}_{\tau_2} + \vec{OG_2} \wedge m_2 \vec{v}(G_2)$$

$$= I_2 \dot{\beta} \hat{y} + l_1^2 m_2 \dot{\alpha} \hat{y} = \left(I_2 \dot{\beta} + l_1^2 m_2 \dot{\alpha}\right) \hat{y}$$

(g) $$K_{\tau_2} = \frac{1}{2} I_2 \dot{\beta}^2 + \frac{1}{2} m_2 (l_1 \dot{\alpha})^2$$

$$K_{\tau_1} = \frac{1}{2} I_1 \dot{\alpha}^2$$

$$U_{\tau_1} = -m_1 g \frac{l_1}{2} \cos(\alpha)$$

$$U_{\tau_2} = -m_2 g l_1 \cos(\alpha)$$

$$U_{tot} = -g l_1 \cos(\alpha) \left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) \quad \Big| \quad K_{tot} = \frac{1}{2}\left(I_1 \dot{\alpha}^2 + I_2 \dot{\beta}^2 + m_2 l_1^2 \dot{\alpha}^2\right)$$

(h) Prouvons que $\frac{d(U+K)}{dt} = 0 = \frac{d\sigma(O)}{dt} - M_{ext}(O)$

- $\frac{d(U+K)}{dt} = \dot{\alpha} g l_1 \sin(\alpha)\left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) + \dot{\alpha}\ddot{\alpha}\left(I_1 + m_2 l_1^2\right) + \dot{\beta}\ddot{\beta} I_2 = 0$

- $\frac{d\sigma(O)}{dt} - M_{ext}(O) = \ddot{\alpha}\left(I_1 + m_2 l_1^2\right) + \ddot{\beta} I_2 + g l_1 \sin(\alpha)\left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) = 0$

Appliquons maintenant le théorème du moment cinétique pour la tige 2 :

$$\frac{d\sigma_2(G_2)}{dt} = M_{ext}^{(G_2)} \Leftrightarrow I_2\ddot{\beta} = 0$$

Nous retrouvons donc une cohérence :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(U+K) = \dot{\alpha}\left(g l_1 \sin(\alpha)\left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) + \left(\ddot{\alpha} I_1 + m_2 l_1^2\right)\right) = 0 \\ \frac{d}{dt}(\sigma(O)) - M_{ext}(O) = g l_1 \sin(\alpha)\left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) + \left(\ddot{\alpha} I_1 + m_2 l_1^2\right) = 0 \end{cases}$$

(i) Pour de petites oscillations : $\sin(\alpha) \simeq \alpha$

$$\ddot{\alpha}\left(I_1 + m_2 l_1^2\right) + \alpha g l_1\left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) = 0$$

Rappelons nous de la forme d'un oscillateur harmonique : $\ddot{\alpha} + \omega^2\alpha = 0$

Dans notre cas $\omega^2 = \frac{g l_1\left(\frac{m_1}{2} + m_2\right)}{I_1 + m_2 l_1^2}$

et $T = 2\pi\omega^{-1}$